

(4) 事件 A 与 B 相互独立的充要条件

① 若 $P(A) > 0$, 则 A 与 B 相互独立的充要条件是 $P(B) = P(B|A)$.

② 若 $P(B) > 0$, 则 A 与 B 相互独立的充要条件是 $P(A) = P(A|B)$.

第四节 随机变量及其概率分布

考点 10 随机变量

设 E 是随机试验, 样本空间为 Ω , 如果对于每一个结果(样本点) $\omega \in \Omega$, 有一个实数 $X(\omega)$ 与之对应, 这样就得到一个定义在 Ω 上的实值函数 $X = X(\omega)$, 则称其为随机变量. 随机变量通常用 $X, Y, Z, \dots$ (或 $X_1, X_2, \dots$) 来表示.

考点 11 离散型随机变量

若随机变量 X 只取有限多个或可列无限多个值, 则称 X 为离散型随机变量.

考点 12 离散型随机变量的概率分布

设离散型随机变量 X 的一切可能值为 $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$, 且对应于 $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ 有 $P\{X = x_k\} = p_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 则称上式为离散型随机变量的概率分布或分布律(列), 常以表格的形式列出.

考点 13 随机变量的分布函数

设 X 为一随机变量, 称函数 $F(x) = P\{X \leq x\} (-\infty < x < \infty)$ 为 X 的分布函数.

考点 14 0-1 分布、二项分布和泊松分布的分布律

注: 此部分内容, 考生可根据自己的情况进行掌握.

(1) 0-1 分布

若随机变量 X 只取两个可能值: 0, 1, 且

$$P\{X = 1\} = p, P\{X = 0\} = q,$$

其中 $0 < p < 1, q = 1 - p$, 则称 X 服从 0-1 分布. X 的分布律为

X	0	1
P	q	p

(2) 二项分布

若随机变量 X 的可能取值为 $0, 1, \dots, n$, 而 X 的分布律为

$$p_k = P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} (k = 0, 1, \dots, n),$$

其中 $0 < p < 1, p + q = 1$, 则称 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 简记为 $X \sim B(n, p)$.

显然, 当 $n = 1$ 时, X 服从 0-1 分布, 即 0-1 分布实际上是二项分布的特例.

第一章 极限与连续

第一节 极限

考点 1 函数极限的描述性定义

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内(点 x_0 可以除外)有定义, 如果当 x 无限地趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限地趋于一个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

(2) $f(x)$ 在 x_0 点的左、右极限

对于函数 $y = f(x)$, 如果当 x 从 x_0 的左(右)边无限地趋于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限地趋于一个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左(右)极限, 记作

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

$$(f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A).$$

(3) 对于函数 $y = f(x)$, 如果当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 无限地趋于一个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

(4) 对于函数 $f(x)$, 如果当 $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) 时, $f(x)$ 无限地趋于常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A).$$

考点 2 无穷小量与无穷大量的概念

(1) 无穷小量

如果当自变量 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的极限值为零, 则称在该变化过程中, $f(x)$ 为无穷小量, 简称无穷小, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0).$$

在微积分中, 常用希腊字母 α, β, γ 来表示无穷小量.

(2) 无穷大量

如果当自变量 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的绝对值无限地增大, 则称在该变化过程中, $f(x)$ 为无穷大量, 简称无穷大, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ (或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

考点 3 函数极限的性质

(1) 四则运算性质:

如果有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

考点 19 期望的性质

(1) $E(C) = C$ (C 为常数).

(2) $E(kX) = kE(X)$.

(3) $E(k_1X + k_2Y) = k_1E(X) + k_2E(Y)$.

(4) 若 X, Y 相互独立, 则 $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

考点 20 方差的性质

(1) $D(C) = 0$.

(2) $D(X + C) = D(X)$.

(3) $D(kX) = k^2D(X)$.

(4) 若 X, Y 相互独立, 则 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

(5) $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

考点 21 几种常见离散型分布的期望与方差

	分布	分布律或概率密度	期望	方差
离散型	X 服从参数为 p 的 0-1 分布	$P\{X = 0\} = q, P\{X = 1\} = p;$ $0 < p < 1, q = 1 - p$	p	pq
	X 服从二项分布 $X \sim B(n, p)$	$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},$ $k = 0, 1, \dots, n; 0 < p < 1, q = 1 - p$	np	npq
	X 服从泊松分布 $X \sim P(\lambda)$	$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$ $k = 0, 1, \dots; \lambda > 0$	λ	λ

注: 此部分考生可根据自己的情况进行掌握.

全国各类成人高等学校招生考试

常考、易考点手册

高等数学 (二)

专科起点
升本科

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B.$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } B \neq 0 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}.$$

注:可将法则中 $x \rightarrow x_0$ 换成 $x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 等任意一种自变量变化趋势,性质仍成立.

(2) 唯一性:如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在,则极限值必唯一.

(3) 夹逼性:设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内(点 x_0 可除外) 满足条件 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

注:该结论对 $x \rightarrow \infty$ 的情况也成立.

考点 4 无穷小量的性质

(1) 有限个无穷小量的和、差、积仍为无穷小量.

(2) 无穷小量与有界量之积仍为无穷小量.

(3) 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x) = A + \alpha$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha = 0$.

考点 5 无穷小量与无穷大量的关系

在同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大量,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量;反之,如果 $f(x)$ 为无穷小量,且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

考点 6 无穷小量的比较

设 α 和 β 是同一过程中的无穷小量,即

$$\lim \alpha = 0, \quad \lim \beta = 0.$$

(1) 如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称 α 是比 β 高阶的无穷小量,记为 $\alpha = o(\beta)$;

(2) 如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = C \neq 0$, 则称 α 是与 β 同阶的无穷小量;

(3) 如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = C = 1$, 则称 α 与 β 是等价无穷小量,记为 $\alpha \sim \beta$;

(4) 如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称 α 是比 β 低阶的无穷小量.

目 录

第一章 极限与连续 (1)

第二章 一元函数微分学 (5)

第三章 一元函数积分学 (12)

第四章 多元函数微分学 (19)

第五章 概率论初步 (24)

一般地,设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为任意 n 个事件,若 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, 则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

② 全概率公式

设随机试验对应的样本空间为 Ω , 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分, B 是任意一个事件, 则

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B | A_i).$$

注:设事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 满足如下两个条件:

(i) $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容, 且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$;

(ii) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$, 即 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 至少有一个发生, 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分.

当 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 Ω 的一个划分时, 每次试验有且只有其中的一个事件发生.

③ 贝叶斯公式

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是样本空间的一个划分, B 是任一事件, 且 $P(B) > 0$, 则

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k) P(B | A_k)},$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

考点 8 事件的独立性

(1) 如果 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, 则称事件 A, B 是相互独立的.

(2) 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件, 如果对于任意整数 $k (1 \leq k \leq n)$ 和任意 k 个整数 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, 有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdot \cdots \cdot P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 简称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 独立; 如果对于任意两个整数 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$, 有 $P(A_{i_1} A_{i_2}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2})$, 则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两独立.

考点 9 条件概率与事件的独立性

(1) 一般地, $P(AB) = P(A) \cdot P(B | A) = P(B) \cdot P(A | B)$.

(2) 随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立一定两两独立; 反之, 它们两两独立不一定相互独立.

(3) 如果 A 与 B 事件相互独立, 则 A 与 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 与 B , $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也都相互独立.

(3) 泊松分布

设随机变量 X 的可能取值为 $0, 1, \dots, n, \dots$, 而 X 的分布律为

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k = 0, 1, 2, \dots),$$

其中 $\lambda > 0$, 则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 简记为 $X \sim P(\lambda)$.

考点 15 随机变量的基本理论

1. 概率分布的性质有: $0 \leq p_k \leq 1; \sum_{k=1}^n p_k = 1$.

2. 分布函数有如下性质:

(1) $0 \leq F(x) \leq 1$.

(2) $F(x)$ 是不减函数.

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$.

(4) $P(x \leq b) = F(b)$.

(5) $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) (a < b)$. 特别地 $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$.

第五节 离散型随机变量的数字特征

考点 16 离散型随机变量的期望

设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 称 $\sum_{k=1}^n x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望, 简称期望或均值, 记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k.$$

考点 17 方差的概念

设 X 为随机变量, 若 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 存在, 则称 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 为 X 的方差, 记为 $D(X)$, 即

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}.$$

若 X 为离散型随机变量, 其分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$D(X) = \sum_{k=1}^n [x_k - E(X)]^2 p_k.$$

考点 18 标准差的概念

随机变量 X 的标准差 $\sigma(X)$ (或称均方差) 为方差的算术根, 即

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

通常,判定所得点 (x_0, y_0) 是否为所给问题的条件极值点,常依据问题的实际意义判定:如果所求驻点唯一,且实际问题确实存在最大值(或最小值),那么,所求点 (x_0, y_0) 就是满足条件的极大值点(或极小值点),也是所给实际问题的最大值点(或最小值点).

第五章 概率论初步

第一节 事件及其概率

考点 1 随机事件的运算满足的运算律

- (1) 对任何事件 A ,有 $A \supset A, A \supset \emptyset, \Omega \supset A, \overline{\overline{A}} = A$.
- (2) 对于事件 A, B, C ,如果 $A \subset B$ 且 $B \subset C$,那么 $A \subset C$.
- (3) 对于任意的事件 A, B ,有:
- $$A + B \supset A, A + B \supset B, A + \Omega = \Omega, A + \emptyset = A, A \cap B \subset A, A \cap B \subset B, A \cap A = A, A \cap \Omega = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$$

- (4) 对于任一事件 A ,有 $\overline{A} \cap A = \emptyset, \overline{A} \cup A = \Omega, \overline{\overline{A}} = A$.

- (5) 对于事件 A, B, C ,有:

交换律: $A + B = B + A; AB = BA$;

结合律: $(A + B) + C = A + (B + C); (AB)C = A(BC)$;

分配律: $(A + B)C = AC + BC; (AB) + C = (A + C)(B + C)$;

对偶律: $\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B}; \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

或另一种写法如下:

交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

结合律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;

分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

对偶律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

考点 2 写出一个试验的所有基本事件及其样本空间

【例 1】 一次掷三枚同样的硬币,观察正面和反面出现的情况.用“正”表示|正面向上|,用“反”表示|反面向上|,写出这个试验的基本事件及样本空间,并写出|至少有一个正面向上|和|恰有两个正面向上|的事件所包含的基本事件.

【解析】 根据试验内容,这个试验的所有基本事件如下:

$$\omega_1 = \{\text{正,正,正}\}, \omega_2 = \{\text{正,正,反}\}, \omega_3 = \{\text{正,反,正}\}, \omega_4 = \{\text{反,正,正}\}, \omega_5 = \{\text{正,反,反}\}, \omega_6 = \{\text{反,正,反}\}, \omega_7 = \{\text{反,反,正}\}, \omega_8 = \{\text{反,反,反}\}.$$

考点 5 概率的公理化定义

设 E 为一随机试验, Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称 $P(A)$ 为事件 A 的概率,如果它满足下列条件:

- (1) 非负性:对任一事件 A ,有 $0 \leq P(A) \leq 1$;

- (2) 规范性: $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$;

- (3) 可列可加性:对于两两互斥的可列个随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$,有

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

考点 6 概率的性质

- (1) $0 \leq P(A) \leq 1, P(\emptyset) = 0$.

- (2) 对于任意事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

特别地,当 A 与 B 互不相容时, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

其可推广:对于任意事件 A, B, C 有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

当 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容时,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n), \text{其中 } n \text{ 为正整数.}$$

- (3) $P(B - A) = P(B) - P(AB)$.

特别地,当 $A \subset B$ 时, $P(B - A) = P(B) - P(A)$,且 $P(A) \leq P(B)$.

- (4) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

以上概率性质很重要. 希望考生掌握这些性质,并会用它们进行概率的基本运算.

第三节 条件概率与事件的独立性

考点 7 条件概率的概念及相关公式

- (1) 条件概率的概念

设 A, B 为同一随机试验的两个事件,且 $P(B) > 0$,则称 $P(A|B)$ 为在事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的条件概率.且

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

- (2) 条件概率的相关公式

① 乘法公式

对任意两事件 A, B ,若 $P(A) > 0$,则 $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

对应区间上连续,且严格单调(单调性不变).

- (6) 初等函数的连续性

初等函数在其定义区间内连续.

- (7) 闭区间上连续函数的性质

① 最值性:如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必能取得最大值 M 和最小值 m .

② 有界性:如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则 $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上有界.

③ 介值性:如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,且其最大值和最小值分别为 M 和 m ,则对于 m 和 M 之间的任意实数 $c(m < c < M)$,必存在 $\xi \in (a, b)$,使 $f(\xi) = c$.

④ 零点定理:如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,且 $f(a) \cdot f(b) < 0$,则必存在 $\xi \in (a, b)$,使 $f(\xi) = 0$.

第二章 一元函数微分学

第一节 导数与微分

考点 1 导数的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,给自变量 x 一增量 Δx ,对应函数 $f(x)$ 的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,该极限值叫做函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数,记作:

$$y' \Big|_{x=x_0}, f'(x_0), \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} \text{ 或 } \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0},$$

即

$$y' \Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 不存在,称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数也可表示为: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

考点 2 左、右导数的定义

若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在,该极限值叫做函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的右导数,记作: $f'_+(x_0)$,即

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

考点 5 概率的公理化定义

设 E 为一随机试验, Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称 $P(A)$ 为事件 A 的概率,如果它满足下列条件:

- (1) 非负性:对任一事件 A ,有 $0 \leq P(A) \leq 1$;

- (2) 规范性: $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$;

- (3) 可列可加性:对于两两互斥的可列个随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$,有

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

考点 6 概率的性质

- (1) $0 \leq P(A) \leq 1, P(\emptyset) = 0$.

- (2) 对于任意事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

特别地,当 A 与 B 互不相容时, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

其可推广:对于任意事件 A, B, C 有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

当 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容时,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n), \text{其中 } n \text{ 为正整数.}$$

- (3) $P(B - A) = P(B) - P(AB)$.

特别地,当 $A \subset B$ 时, $P(B - A) = P(B) - P(A)$,且 $P(A) \leq P(B)$.

- (4) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

以上概率性质很重要. 希望考生掌握这些性质,并会用它们进行概率的基本运算.

第三节 条件概率与事件的独立性

考点 7 条件概率的概念及相关公式

- (1) 条件概率的概念

设 A, B 为同一随机试验的两个事件,且 $P(B) > 0$,则称 $P(A|B)$ 为在事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的条件概率.且

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

- (2) 条件概率的相关公式

① 乘法公式

对任意两事件 A, B ,若 $P(A) > 0$,则 $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

考点 7 无穷小的等价代换定理

设 $\alpha(x), \bar{\alpha}(x), \beta(x), \bar{\beta}(x)$ 是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小量,且满足 $\alpha(x) \sim \bar{\alpha}(x), \beta(x) \sim \bar{\beta}(x), f(x), g(x)$ 在这一条件下有意义,若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{\alpha}(x)f(x)}{\bar{\beta}(x)g(x)}$ 存在,则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)f(x)}{\beta(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{\alpha}(x)f(x)}{\bar{\beta}(x)g(x)}.$$

常用等价无穷小:

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \ln(1+x) \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \tan x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x (\mu \text{ 为实常数}, \mu \neq 0)$.

考点 8 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型} \right).$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad (1^\infty \text{ 型}).$$

第二节 连续

考点 9 连续的基本概念

- (1) 函数在点 x_0 处连续的概念

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续,此时有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

另一种等价的定义方式:

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果自变量在点 x_0 处的改变量 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的三个要素:

① 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义;

② 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限存在;

③ 极限值等于该点的函数值.

- (2) 左连续、右连续

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义,如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ [或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) =$

同理左导数定义为:

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是函数 $f(x)$ 在 x_0 处左、右导数都存在且相等.

考点 3 函数在区间 (a, b) 内的导数

若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点 x 处都可导, 则称函数在区间 (a, b) 内可导. 而当 x 在区间 (a, b) 内变动时, 其导数构成了 x 的函数, 叫做函数 $f(x)$ 的导函数, 简称导数, 记作:

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx} \text{ 或 } \frac{df}{dx}.$$

考点 4 高阶导数

若函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处仍可导, 则称 $f'(x)$ 在点 x 处的导数为函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的二阶导数, 记作 y'' , $f''(x)$ 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}$, 即

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

同理可以定义更高阶的导数, 如 n 阶导数定义为:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

考点 5 函数的微分

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 在点 x_0 取一增量 Δx (且 $x_0 + \Delta x$ 在该邻域内), 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 则 Δy 可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x).$$

其中 A 为不依赖于 Δx 的常数, $o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微 (或可微分), 并称 $A\Delta x$ 为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处对应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 dy 或 $df(x)$, 即

$$dy = A\Delta x.$$

考点 6 可导和连续的关系

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处必连续; 反之不一定成立, 即函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续, 它在该点不一定可导.

考点 7 导数的几何意义

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 存在, 则表明曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处存在切线, 且切线的斜率为 $f'(x_0)$, 切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 法线方程为

$f(x_0)$], 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续 (或右连续).

(3) 区间上的连续性概念

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内任一点连续, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续; 如果 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内任一点连续, 并且在 $x = a$ 处右连续, 在 $x = b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 并称 $f(x)$ 为该区间上的连续函数.

(4) 函数间断点的概念

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点.

函数 $f(x)$ 的间断点 x_0 从极限角度可分为两类:

① 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 皆存在, 称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

特别地, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$ (或 $f(x_0)$ 不存在), 称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点;

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点;

② 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在, 称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点

特别地, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 为 ∞ , 则称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点;

若 $x \rightarrow x_0^-$ (或 $x \rightarrow x_0^+$) 时, $f(x)$ 一直在上、下振荡, 称 x_0 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

考点 10 连续的基本理论

(1) 函数在点 x_0 处连续与极限存在的关系

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 必有极限, 但反之不成立.

(2) 函数在点 x_0 处连续的充分必要条件

函数在点 x_0 处连续的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

(3) 连续函数的四则运算性质

设函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处均连续, 则

① $f(x) \pm g(x)$ 在点 x_0 处连续;

② $f(x) \cdot g(x)$ 在点 x_0 处连续;

③ 若 $g(x_0) \neq 0$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处连续.

(4) 连续函数的复合运算性质

设 $u = g(x)$ 在点 x_0 处连续, $y = f(u)$ 在点 $u_0 = g(x_0)$ 处也连续, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x_0 处连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = f[g(x_0)].$$

(5) 连续函数的反函数连续性

设函数 $y = f(x)$ 在某区间上连续且为严格单调函数, 则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 也在

(2) 如果 $\Delta > 0$, 则点 (x_0, y_0) 不是函数的极值点.

(3) 如果 $\Delta = 0$, 则函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有无极值不能确定, 需用其他方法判别.

考点 12 条件极值的求法

先构造拉格朗日函数: $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$.

求解方程组

$$\begin{cases} F_x = f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0, \\ F_y = f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0, \\ F_\lambda = \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

解出 x, y, λ , 则其中点 (x, y) 就是 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点的坐标.

考点 13 求二元函数的无条件极值及极值点

求二元函数的无条件极值的步骤:

第一步: 求 $f_x(x, y), f_y(x, y)$, 并解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) = 0, \end{cases}$ 求得一切驻点;

第二步: 对于每一个驻点 (x_0, y_0) , 求出二阶偏导数的值 A, B 和 C ;

第三步: 定出 $B^2 - AC$ 的符号, 判定点 (x_0, y_0) 是否是极值点, 若是, 判定是极大值点还是极小值点, 并求出极值 $f(x_0, y_0)$.

考点 14 求二元函数的条件极值

求二元函数 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值的方法与步骤:

方法一: 化条件极值为无条件极值

第一步: 从条件 $\varphi(x, y) = 0$ 中, 求出 y 的显函数形式 $y = \psi(x)$;

第二步: 将 $y = \psi(x)$ 代入二元函数 $f(x, y)$ 中, 化为一元函数 $f[x, \psi(x)]$ 的无条件极值;

第三步: 求出一元函数 $f[x, \psi(x)]$ 的极值即为所求.

方法二: 拉格朗日乘数法

第一步: 作拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ (λ 为拉格朗日乘数);

第二步: 由函数 $F(x, y, \lambda)$ 的一阶偏导数组成如下方程组

$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0, \\ F_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0, \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = \varphi(x, y) = 0; \end{cases}$$

第三步: 求解上述方程组, 得驻点 (x_0, y_0, λ) , 则点 (x_0, y_0) 就是函数 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能的条件极值点.

$f(x_0)$], 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续 (或右连续).

(3) 区间上的连续性概念

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内任一点连续, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续; 如果 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内任一点连续, 并且在 $x = a$ 处右连续, 在 $x = b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 并称 $f(x)$ 为该区间上的连续函数.

(4) 函数间断点的概念

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 则称点 x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点.

函数 $f(x)$ 的间断点 x_0 从极限角度可分为两类:

① 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 皆存在, 称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

特别地, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$ (或 $f(x_0)$ 不存在), 称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点;

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点;

② 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在, 称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点

特别地, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 为 ∞ , 则称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点;

若 $x \rightarrow x_0^-$ (或 $x \rightarrow x_0^+$) 时, $f(x)$ 一直在上、下振荡, 称 x_0 为 $f(x)$ 的振荡间断点.

考点 10 连续的基本理论

(1) 函数在点 x_0 处连续与极限存在的关系

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在点 x_0 必有极限, 但反之不成立.

(2) 函数在点 x_0 处连续的充分必要条件

函数在点 x_0 处连续的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

(3) 连续函数的四则运算性质

设函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处均连续, 则

① $f(x) \pm g(x)$ 在点 x_0 处连续;

② $f(x) \cdot g(x)$ 在点 x_0 处连续;

③ 若 $g(x_0) \neq 0$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处连续.

(4) 连续函数的复合运算性质

设 $u = g(x)$ 在点 x_0 处连续, $y = f(u)$ 在点 $u_0 = g(x_0)$ 处也连续, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x_0 处连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = f[g(x_0)].$$

(5) 连续函数的反函数连续性

设函数 $y = f(x)$ 在某区间上连续且为严格单调函数, 则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 也在

试验的样本空间为: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$.

不妨把 $\{\text{至少有一个正面向上}\}, \{\text{恰有两个正面向上}\}$ 的事件分别用 A, B 表示, 则:

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\},$$

$$B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}.$$

考点 3 利用事件的运算符号表示事件

【例 2】 设 A, B, C 为某一随机试验中的三个事件, 试用事件的运算符号表示下列事件:

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生;

(2) A, B, C 都发生;

(3) A, B, C 至少有一个发生;

(4) A, B, C 恰有一个发生;

(5) A, B, C 至少有两个发生;

(6) A, B, C 皆不发生.

【解析】 根据各种运算的意义, 各事件可表示为:

(1) $\overline{A}B\overline{C}$ (或 $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$);

(2) ABC 或 $A \cap B \cap C$;

(3) $A + B + C$ (或 $A \cup B \cup C$);

(4) $\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$ (或 $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$);

(5) $\overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$

(或 $(\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$);

(6) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ (或 $\overline{A + B + C}, \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}, \overline{A \cup B \cup C}$).

第二节 古典概型及概率的定义和性质

考点 4 古典概型

(1) 古典概型

如果随机试验 E 的样本空间 Ω 具有如下特征: ① 有限性 —— Ω 中只含有有限个基本事件; ② 等可能性 —— 每个基本事件发生的可能性相同. 那么称这样的随机试验对应的概率模型为古典概型.

如, 掷硬币、掷骰子的试验等均属古典概型.

(2) 古典概型中随机事件的概率计算公式

设古典概型中随机试验 E 的样本空间 Ω 由 n 个基本事件组成, 而随机事件 A 包含 k ($\leq n$) 个基本事件, 则事件 A 发生的概率为 $P(A) = \frac{k}{n}$.

则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续; 否则, 称函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处间断.

如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内的每个点 (x, y) 处都连续, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内连续.

考点 3 多元函数的连续性

(1) 多元连续函数的和、差、积仍为连续函数; 在分母不为零的点处, 连续函数之商仍为连续函数;

(2) 多元连续函数的复合函数也是连续函数;

(3) 多元初等函数在其定义域上都是连续函数;

(4) 最值定理 有界闭区域 D 上连续的函数, 在区域 D 上必能取得最大值与最小值;

(5) 介值定理 有界闭区域 D 上连续的函数, 在区域 D 上必能取得介于最大值与最小值之间的任何值.

考点 4 求二元函数的定义域

二元函数定义域的求法与一元函数定义域的求法相同, 即考虑分式的分母不能为零, 负数不能开偶次方, 零与负数无对数, 反正弦函数、反余弦函数的自变量只能在 -1 与 1 之间取值, 正切函数的自变量不能等于 $k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, 余切函数的自变量不能等于 $k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 等. 考虑到以上这些因素, 建立不等式组, 求出其解的交集, 就是二元函数的定义域. 定义域的代数表达式为

$$D = \{(x, y) \mid x, y \text{ 满足的条件}\}.$$

考点 5 求二元函数的间断点

对于多元初等函数, 由于在其定义域上皆连续, 所以求其间断点即求其没有定义的点.

【例 1】求函数 $f(x, y) = \frac{x+y}{y^2-2x}$ 的间断点.

【解析】由于该函数关系式是分式, 于是在满足 $y^2 - 2x \neq 0$ 的区域上, 函数都有定义, 且皆连续, 所以, 此函数在抛物线 $y^2 = 2x$ 上每点处都间断 (形成间断线). 故 $f(x, y)$ 的间断点为 $(\frac{y^2}{2}, y)$ 或 $(x, \pm \sqrt{2x})$.

第二节 偏导数与全微分

考点 6 全微分的性质

(1) 多元函数的可微、偏导数存在与连续三者之间有如下关系, 即全微分存在的必要条件与充分条件:

② 如果 $z = f(u, v), u = \varphi(x), v = \psi(x)$, 则复合函数 $z = f[\varphi(x), \psi(x)]$ 的导数为:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

③ 如果 $z = f(u, v), u = x, v = \psi(x)$, 则复合函数 $z = f[x, \psi(x)]$ 的导数为:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

考点 9 隐函数的偏导数

(1) 一元隐函数

设方程 $F(x, y) = 0$ 确定 y 是 x 的函数, 且 $F(x, y)$ 在点 (x, y) 的某个邻域内具有连续偏导数, 则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \quad (F_y(x, y) \neq 0).$$

注: 也可用一阶全微分形式的不变性, 求隐函数的导数.

(2) 二元隐函数

如果方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定 z 是 x, y 的函数, 且 $F(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 的某个邻域内具有连续偏导数, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad (F_z(x, y, z) \neq 0).$$

注: 求隐函数的导数 (偏导数) 的这种公式, 可推广使用到任何多元隐函数中去. 请注意求导公式的结构.

第三节 二元函数的极值

考点 10 极值存在的必要条件

设点 $P_0(x_0, y_0)$ 为 $z = f(x, y)$ 的极值点, 且 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的偏导存在, 则必有 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$.

考点 11 极值存在的充分条件

设函数 $z = f(x, y)$ 在其驻点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有二阶的连续偏导数, 令 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0), \Delta = B^2 - AC$, 于是有

(1) 如果 $\Delta < 0$, 则点 (x_0, y_0) 是函数的极值点, 且

当 $A < 0$ 时 $f(x_0, y_0)$ 是极大值; 当 $A > 0$ 时 $f(x_0, y_0)$ 是极小值.

第二节 洛必达法则

考点 16 “ $\frac{0}{0}$ ”型未定式

如果函数 $f(x), g(x)$ 满足条件:

(1) 在点 x_0 的某一去心邻域 (或 $|x| > N$) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大), 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

考点 17 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式

如果 $f(x), g(x)$ 满足条件:

(1) 在点 x_0 的某一去心邻域 (或 $|x| > N$) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大), 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

考点 18 “ $0 \cdot \infty$ ”型、“ $\infty - \infty$ ”型未定式

求“ $0 \cdot \infty$ ”型和“ $\infty - \infty$ ”型的极限, 通常都是用简单的恒等变形化成“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型的未定式.

例如: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 就是“ $0 \cdot \infty$ ”型的未定式, 对这种类型的未定式可变换为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

即变成“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型的未定式.

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 就是“ $\infty - \infty$ ”型的未定式, 对这种类型的未定式可变换为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}},$$

即“ $\frac{0}{0}$ ”型的未定式.

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0),$$

特殊情况, 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线垂直于 x 轴, 切线方程为 $x = x_0$, 法线方程为 $y = f(x_0)$.

考点 8 导数的四则运算

设函数 $u = u(x), v = v(x)$ 可导, 则

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

(2) $(uv)' = u'v + uv'; (ku)' = ku' (k \text{ 为常数}).$

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$

注: (1)(2) 可推广到有限多个情形, 如:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

考点 9 基本初等函数的导数公式

(1) $(c)' = 0$ (c 为常数).

(2) $(x^a)' = ax^{a-1}$.

(3) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a; (e^x)' = e^x$.

(4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

(5) $(\sin x)' = \cos x$.

(6) $(\cos x)' = -\sin x$.

(7) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

(8) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$.

(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(11) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

(12) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

(13) $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$.

(14) $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$.

考点 10 复合函数的求导法则

设 $y = f(u), u = g(x)$ 复合成 $y = f[g(x)]$, 若 $u = g(x)$ 在点 x 处可导, $y = f(u)$ 在

注: $f(x), g(x)$ 中哪一个函数放到分母上去没有一定原则,但若其中之一为形如 $\ln x$, $\arcsin x$ 等函数时尽量不变到分母中去,这样往往可以简化计算.

第三节 导数的应用

考点 19 函数极值的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义.

(1) 若除点 x_0 外,在该邻域内,恒有 $f(x) < f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$,点 x_0 称为 $f(x)$ 的极大值点.

(2) 若除点 x_0 外,在该邻域内,恒有 $f(x) > f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$,点 x_0 称为 $f(x)$ 的极小值点.

函数的极大值与极小值统称为函数的极值,函数的极大值点与极小值点统称为函数的极值点.

考点 20 曲线的渐近线

若点 M 沿曲线 $y = f(x)$ 无限远离原点时,它与某条定直线 L 之间的距离无限接近于零,则称直线 L 为曲线 $y = f(x)$ 的一条渐近线.

要求掌握水平渐近线和铅直渐近线的求法(斜渐近线不作要求).

(1) 若直线 L 与 x 轴平行,称 L 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

即若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$,则直线 $y = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

(2) 若直线 L 与 x 轴垂直,称 L 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.

即若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$,则直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.

注:若 $x = x_0$ 为铅直渐近线,则点 x_0 必为 $f(x)$ 的不连续点,因此求铅直渐近线时,只需从 $f(x)$ 的不连续点中去找 x_0 .

考点 21 函数单调性的判定

设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导.

(1) 若对于任意的 $x \in (a, b)$,有 $f'(x) > 0$,则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为单调增加的函数.

(2) 若对于任意的 $x \in (a, b)$,有 $f'(x) < 0$,则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为单调减少的函数.

考点 22 函数取得极值的必要条件和充分条件

(1) 必要条件

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导,且在点 x_0 处取得极值,则在点 x_0 处必有 $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在,即 x_0 必为函数 $f(x)$ 的驻点或不可导点.

反之不成立,即函数 $f(x)$ 的驻点或不可导点并不一定是极值点.

(2) 由曲线段 $x = \varphi(y), y \in [c, d]$ 绕 y 轴旋转一周所成的体积(如图 3-10)为

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

上述体积公式也可以看做由曲线 $x = \varphi(y)$,直线 $y = c, y = d (c < d)$ 及 y 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所成的体积.

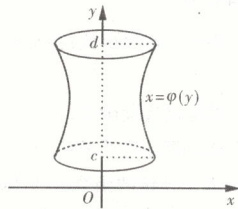


图 3-10

(3) 由两曲线 $y = f_1(x), y = f_2(x)$,且 $f_1(x), f_2(x)$ 都在 x 轴同侧($|f_2(x)| > |f_1(x)|$),及两直线 $x = a, x = b (a < b)$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的体积为

$$V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

(4) 由两曲线 $x = \varphi_1(y), x = \varphi_2(y)$,且 $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ 都在 y 轴同侧($|\varphi_2(y)| > |\varphi_1(y)|$),及两直线 $y = c, y = d (c < d)$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所成的体积为

$$V = \pi \int_c^d [\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)] dy.$$

第四章 多元函数微分学

第一节 多元函数、极限与连续性

考点 1 二元函数的极限

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一去心邻域内有定义,点 $P(x, y)$ 为该邻域内任意一点,当点 $P(x, y)$ 以任意方式趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时,函数 $f(x, y)$ 的值都趋近于一个确定的常数 A ,则称 A 是函数 $z = f(x, y)$ 当点 $P(x, y)$ 趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时的极限,记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

关于二元函数的极限,只要理解概念即可,不要求考生掌握求二元函数极限的方法.

考点 2 二元函数的连续性

如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义,且有

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

相应点 $u = g(x)$ 可导,则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 处可导,且有链式法则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x).$$

上述链式法则也可以用于多层复合的情形.

考点 11 常用的高阶求导公式

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0).$

(2) $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}.$

(3) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}).$

(4) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}).$

(5) $(\frac{1}{x+b})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+b)^{n+1}}.$

(6) $[\ln(x+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+b)^n}.$

考点 12 高阶求导运算法则

设函数 u 和 v 具有 n 阶导数,则

(1) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)};$

(2) $(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$ (其中 c 为常数);

(3) 莱布尼茨公式: $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$ (其中 $C_n^k = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$

为组合数).

考点 13 可微与可导的关系

$f(x)$ 在点 x 可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x 可导,且 $dy = f'(x) dx$.

由 $dy = f'(x) dx$ 可得 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$,即 $f(x)$ 在点 x 处的导数 $f'(x)$ 等于函数微分 dy 与

自变量微分 dx 之商,故导数又叫微商.

注:微分 dy 与函数增量 Δy 的差 $\Delta y - dy = o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小,因此当 $|\Delta x|$ 很小时,可用 dy 近似代替 Δy .

考点 14 函数可微的充要条件

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,

即 $dy \Big|_{x=x_0}$ 存在 $\Leftrightarrow f'(x_0)$ 存在.

考点 15 可微与连续的关系

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微,则函数 $f(x)$ 必在点 x_0 处连续.

偏导数存在且连续 $\xrightarrow{\text{充分条件}}$ 可微 $\begin{cases} \xrightarrow{\text{必要条件}} \text{偏导数存在,} \\ \xrightarrow{\text{必要条件}} \text{连续.} \end{cases}$

但反之不一定成立.

注:对于多元函数,可导与可微不等价,即可微偏导一定存在,偏导存在不一定可微;同样,偏导存在不一定连续,连续也不一定偏导存在.

(2) 一阶全微分形式的不变性

对于函数 $z = f(u, v)$,如果 $f(u, v)$ 可微,那么无论 u, v 是函数的中间变量,还是自变量,均有:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

考点 7 高阶混合偏导数的性质

如果二元函数 $z = f(x, y)$ 的二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在点 (x_0, y_0) 处连续,那么,在该点处

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

考点 8 多元函数的偏导数

(1) 复合函数的偏导数

设函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 在点 (x, y) 处有连续偏导数.函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 处有连续偏导数.则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 处对 x, y 有连续偏导数,且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

(2) 几种特殊情形下的链式法则

设下面几种情形中的函数皆具有连续的导数(偏导数):

① 如果 $z = f(u, v), u = \varphi(x), v = \psi(x, y)$,则复合函数 $z = f[\varphi(x), \psi(x, y)]$ 的偏导数为:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

(9) 在区间 $[a, b]$ 上恒有 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

注:在性质(7)、(8)、(9)中都有前提条件,在区间 $[a, b]$ 上,即下限小,上限大,否则都不成立.

(10) 定积分中值定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$,使 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ 成立,则称 $f(\xi)$ 或称 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值.

中值定理几何解释(以 $f(x) \geq 0$ 为例):

在区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ 使以区间 $[a, b]$ 为底边,以曲线 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的矩形面积(如图 3-4).

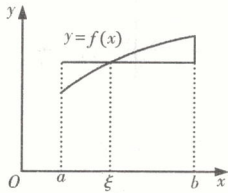


图 3-4

考点 7 定积分的求法

(1) 定积分的换元积分法

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,函数 $x = \varphi(t)$ 满足:

① $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上单调且连续;

② $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

③ $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续,则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

(2) 定积分的分部积分法

设函数 $u(x), v(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数,则

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx \text{ 或 } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

(3) 奇、偶函数在对称区间上的积分

若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上为连续奇函数,则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上为连续偶函数,则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

$$(13) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

$$(14) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$(15) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$(16) \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + C.$$

$$(17) \int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + C.$$

$$(18) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

$$(19) \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

考点 3 第一换元积分法(凑微分法)

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$, $u = \varphi(x)$ 可导,则有换元公式

$$\begin{aligned} \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx &= \int f(u) du \\ &= F(u) + C = F[\varphi(x)] + C. \end{aligned}$$

不过,待求不定积分的被积函数,并不一定恰好能写成上述要求的形式,例如 $\int \sin(2x+1) dx$,中间变量 $\varphi(x) = 2x+1$,但 $\int \sin(2x+1) dx \neq \int \sin(2x+1) (2x+1)' dx$,为了“凑”成可用第一换元法的形式,考虑到 $(2x+1)' dx = 2 dx$ 或 $dx = \frac{1}{2} \cdot (2x+1)' dx$,从而 $\int \sin(2x+1) dx = \int \sin(2x+1) \cdot \frac{1}{2} (2x+1)' dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x+1) d(2x+1) = -\frac{\cos(2x+1)}{2}$,这就转化为可用第一换元法的情形,在用第一换元积分法常常需要“凑”出中间变量的导数(或微分),因此第一换元法又叫做凑微分法.

常用的凑微分公式:

$$(1) f(ax+b) dx = \frac{1}{a} f(ax+b) d(ax+b) \quad (a \neq 0).$$

$$(2) f(ax^k+b)x^{k-1} dx = \frac{1}{ka} f(ax^k+b) d(ax^k+b) \quad (a \neq 0, k \neq 0).$$

$$(3) f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} dx = -f\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right).$$

(4) 由两曲线 $x = \varphi_1(y), x = \varphi_2(y)$, 且 $\varphi_2(y) > \varphi_1(y)$, 及两直线 $y = c, y = d (c < d)$ 所围图形面积(如图 3-7)为

$$S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)] dy.$$

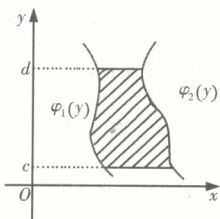


图 3-7

(5) 由两曲线 $y = f_1(x), y = f_2(x) (f_2(x) > f_1(x))$ 所围成的封闭图形的面积(如图 3-8)为

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

其中 a 是交点中 x 的最小值, b 是交点中 x 的最大值.

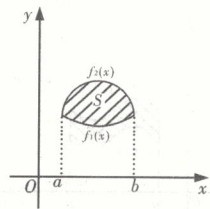


图 3-8

考点 9 旋转体的体积

(1) 由曲线 $y = f(x), x \in [a, b]$ 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积(如图 3-9)为

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

上述体积公式也可以看做由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b (a < b)$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的体积.

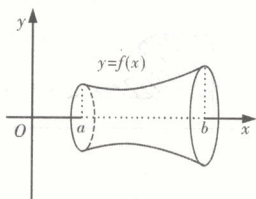


图 3-9

(2) 第一种充分条件

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内可导,且 $f'(x_0) = 0$ (或在点 x_0 处 $f'(x)$ 不存在).若在此邻域内:

① 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 而当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$;

② 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 而当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$;

若当 $x < x_0$ 与 $x > x_0$ 时, $f'(x)$ 不改变符号, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不取得极值.

(3) 第二种充分条件

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$. 若

① $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$;

② $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$;

③ $f''(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可能取得极值, 也可能不取得极值, 这时需要用第一种充分条件判定.

考点 23 最大值与最小值的求法

闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $y = f(x)$ 必定存在最大值与最小值.

求最大值与最小值的一般方法是:

(1) 求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的所有驻点、导数不存在的点.

(2) 求出上述各点及区间两个端点 $x = a, x = b$ 处的函数值.

(3) 进行比较, 其中最大的数值即为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 而其中最小的数值即为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值.

注:在实际问题中,如果在定义域内只有一个驻点 x_0 , 就不必讨论 $f(x_0)$ 是不是极值, 而直接根据题意下结论, $f(x_0)$ 是最大值或最小值.

考点 24 曲线凹凸性的判定

设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导.

(1) 若在 (a, b) 内有 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为凹的.

(2) 若在 (a, b) 内有 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为凸的.

考点 25 曲线拐点的判定

对于在 (a, b) 内的连续曲线弧 $y = f(x)$, 判定拐点的般方法是:

(1) 求出该函数的二阶导数, 并求出使二阶导数等于零的点, 以及二阶导数不存在的点;

(2) 判定上述各点两侧, 函数的二阶导数是否异号, 如果 $f''(x)$ 在 x_0 的两侧异号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线弧 $y = f(x)$ 的拐点.

$$(4) f(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2f(\sqrt{x}) d\sqrt{x}.$$

$$(5) f(e^x) \cdot e^x dx = f(e^x) de^x.$$

$$(6) f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = f(\ln x) d(\ln x).$$

$$(7) f(\sin x) \cdot \cos x dx = f(\sin x) d(\sin x).$$

$$(8) f(\cos x) \cdot \sin x dx = -f(\cos x) d(\cos x).$$

$$(9) f(\tan x) \cdot \sec^2 x dx = f(\tan x) d(\tan x).$$

$$(10) f(\cot x) \cdot \csc^2 x dx = -f(\cot x) d(\cot x).$$

$$(11) f(\arcsin x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = f(\arcsin x) d(\arcsin x).$$

$$(12) f(\arccos x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -f(\arccos x) d(\arccos x).$$

$$(13) f(\arctan x) \cdot \frac{dx}{1+x^2} = f(\arctan x) d(\arctan x).$$

第二节 定积分

考点 4 定积分的几何意义

若在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$, 则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值为正, 且其表示由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b, y = 0$ 所围成图形曲边梯形的面积, 即 $\int_a^b f(x) dx = S$. (如图 3-1)

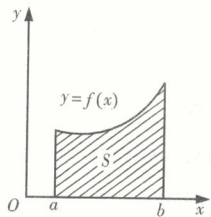


图 3-1

若在 $[a, b]$ 上 $f(x) < 0$, 则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值为负, 且这个负数的相反数即 $-\int_a^b f(x) dx$ 表示由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b, y = 0$ 所围图形曲边梯形的面积, 即 $\int_a^b f(x) dx = -S$. (如图 3-2)

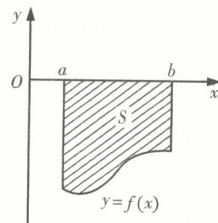


图 3-2

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有正有负, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 表示曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的各部分图形的面积代数和, 即 $\int_a^b f(x) dx = S_1 - S_2$. (如图 3-3)

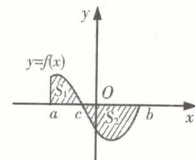


图 3-3

考点 5 函数可积条件

- (1) $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的必要条件是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.
- (2) $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充分条件是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

考点 6 定积分的性质

- (1) $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k 为常数).
- (2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.
- (3) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.
- (4) 规定 $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- (5) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
- (6) $\int_a^b dx = b - a$.
- (7) 若在区间 $[a, b]$ 上有 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- (8) 设 m, M 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最小值, 最大值, 则

第三章 一元函数积分学

第一节 不定积分

考点 1 不定积分的性质

- (1) $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ (k 为常数).
- (2) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.
- (3) $(\int f(x) dx)' = f(x)$ 或 $d \int f(x) dx = f(x) dx$.
- (4) $\int f'(x) dx = f(x) + C$ 或 $\int df(x) = f(x) + C$.

考点 2 基本积分公式

- (1) $\int k dx = kx + C$ (k 为常数).
 - (2) $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$).
 - (3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$.
 - (4) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$ ($a > 0, a \neq 1$).
 - (5) $\int e^x dx = e^x + C$.
 - (6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
 - (7) $\int \cos x dx = \sin x + C$.
 - (8) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$.
 - (9) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$.
 - (10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$.
 - (11) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$.
- 常用的积分公式有:
- (12) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ($a > 0$).

第三节 定积分的应用

考点 8 求平面图形的面积

- (1) 由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b$ ($a < b$) 及 x 轴所围图形面积为

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

当 $f(x) \geq 0$ 时, $S = \int_a^b f(x) dx$ (如 P₃₀ 图 3-1);

当 $f(x) \leq 0$ 时, $S = -\int_a^b f(x) dx$ (如 P₃₀ 图 3-2);

当 $f(x)$ 有正有负时, $S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$ (如 P₃₁ 图 3-3).

- (2) 由两曲线 $y = f_1(x), y = f_2(x)$ ($f_2(x) > f_1(x)$) 及两直线 $x = a, x = b$ ($a < b$) 所围图形的面积 (如图 3-5) 为

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

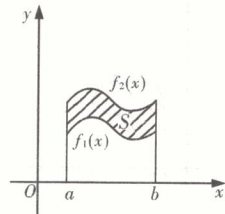


图 3-5

- (3) 由曲线 $x = \varphi(y)$, 直线 $y = c, y = d$ ($c < d$) 及 y 轴所围图形的面积 (如图 3-6) 为

$$S = \int_c^d |\varphi(y)| dy.$$

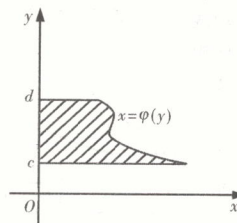


图 3-6