

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1)$$
$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1 \leq x < 1)$$

第七章 常微分方程

第一节 一阶微分方程

考点 1 一阶线性齐次微分方程的通解公式

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

考点 2 一阶线性非齐次微分方程的通解公式

$$y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] e^{-\int P(x)dx}$$

考点 3 一阶微分方程的求解

这类题的求解方法如下:

第一步:先判断方程类型属哪一种形式.

第二步:用与方程类型相符的方法求解,主要有以下几个方面.

1. 可分离变量的微分方程的求解方法.

分离变量→两边积分→得通解.

2. 一阶线性齐次微分方程的求解方法.

方法一 化为可分离变量的方程求解

方法二 公式法,通解公式

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

3. 一阶线性非齐次微分方程的求解方法.

方法一 常数变易法

先求齐次方程的通解 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ → 将齐次通解中的“C”变易为待定函数 $C(x)$

构造非齐次方程的解 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ → 代入原非齐次方程求出 $C(x)$,进而得原非齐次方程的解.

方法二 公式法,非齐次方程的通解公式

$$y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] e^{-\int P(x)dx}$$

$$k = \begin{cases} 0, \alpha + i\beta \text{ 不是特征根,} \\ 1, \alpha + i\beta \text{ 是特征根.} \end{cases}$$

解题指导

二阶常系数线性微分方程的求解方法:

第一步:首先判断方程类型是否为二阶常系数线性微分方程.

第二步:若是,看是齐次,还是非齐次.

1. 若是齐次的,应先写出特征方程: $r^2 + pr + q = 0$,然后求特征根,由特征根构造方程的通解.

2. 若是非齐次的,应先求出其对应的齐次方程的通解,然后构造非齐次方程的特解,最后由解的结构得到原非齐次方程的通解.

第一章 极限和连续

第一节 函数

考点 1 几种初等函数的运算

1. 指数函数运算性质

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

2. 对数函数运算性质

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_a x^b = b \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

3. 常用的三角函数公式

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x \cdot \csc x = 1, \cos x \cdot \sec x = 1, \tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

第二节 极限

考点 2 数列极限的性质

1. 若一个数列有极限,则极限唯一.

2. 数列有无限项,极限是何值,与数列中含有限项的个数无关,即数列增加、减少或改变有限项不影响数列变化的趋势.

全国各类成人高等学校招生考试

常考、易考点手册

高等数学(一)

本书编写组 编

专科起点
升本科

3. 有极限的数列一定有界,有界数列不一定有极限,无界数列一定无极限.(一个数列 $\{x_n\}$ 是有界的,是指存在一个与 n 无关的常数 $M > 0$,使得 $|x_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$)
4. 单调有界数列必有限. (一个数列 $\{x_n\}$ 是单调的,是指对于每一个 n ,都有 $x_{n+1} > x_n$ 或 $x_{n+1} < x_n$,前者为单调增加,后者为单调减少)
5. 夹逼准则:设有数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$,若 $y_n \leq x_n \leq z_n (n = 1, 2, \dots)$,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

考点 3 数列极限的四则运算法则

设有数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$,若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$,则

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \pm B$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \cdot B$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$.

考点 4 函数极限存在的充要条件

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

考点 5 函数极限的性质

- 若函数极限存在,则极限唯一.
- 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 且 $A > 0$ (或 $A < 0$),则必存在 x_0 的某一邻域,在该邻域内,有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).
- 若在 x_0 的某一去心邻域内有 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$),且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,则必有 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

4. 夹逼准则:设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义,若 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$,则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

考点 6 函数极限四则运算法则

设有函数 $f(x), g(x)$,若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$,则

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$.

- ③ 若 $\rho = +\infty$,则 $R = 0$ (仅在 $x = 0$ 点收敛).

考点 16 求幂级数的收敛半径或收敛区间

- 对于标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,首先求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$,则收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$ ($\rho = 0, R = +\infty; \rho = +\infty, R = 0$),收敛区间为 $(-R, R)$.
- 对于一般型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$,仍按上述(1)中的方法求 R ,而收敛区间为 $(x_0 - R, x_0 + R)$,即以 x_0 为中心 R 为半径的开区间.
- 对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ (或 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$) 等缺项级数,取其绝对值级数用比值判别法确定收敛区间;或作变换化为标准型幂级数进行讨论.

第五节 将初等函数展开成幂级数

考点 17 初等函数的基本理论

- 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内收敛于和函数 $S(x)$,则
 - $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内连续.
 - $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可导,且 $S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.
 - $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可积,且 $\int_0^x S(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

[注] 求导前后两个幂级数的下标要变化.

- 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2 ,当 $R = \min\{R_1, R_2\}$ 时,则 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ 在 $(-R, R)$ 内收敛,且 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

考点 18 几种常用函数的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

目 录

第一章 极限和连续	(1)
第二章 一元函数微分学	(4)
第三章 一元函数积分学	(10)
第四章 空间解析几何	(16)
第五章 多元函数微积分学	(17)
第六章 无穷级数	(23)
第七章 常微分方程	(28)

第七章 常微分方程

方法三 积分因子法

将方程两边同乘以 $e^{\int P(x) dx}$,将方程左边化为某函数的导数或微分——两边积分求解.

第二节 二阶常系数线性微分方程

考点 4 二阶常系数线性齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 解的结构

若函数 y_1, y_2 为该方程两个线性无关的解,即 $y_1 \neq k y_2$,则该方程的通解为 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

考点 5 二阶常系数线性非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 解的结构

若 y^* 为方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的一个特解, $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 为与其对应的齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解,则 $y^* + \bar{y}$ 为方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的通解.

若 y_1 是方程 $y'' + py' + qy = f_1(x)$ 的解, y_2 是方程 $y'' + py' + qy = f_2(x)$ 的解,则 $y_1 + y_2$ 是方程 $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$ 的解.

考点 6 二阶常系数线性齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 通解的求法

先写出与其对应的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$.

1. 若特征方程有两个不等实根 r_1, r_2 ,则齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.

2. 若特征方程有一重根 r ,则齐次方程的通解为 $\bar{y} = (C_1 x + C_2) e^{rx}$.

3. 若特征方程无实根,或者说有一对共轭复根 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$,则齐次方程的通解为 $\bar{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

考点 7 二阶常系数线性非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 通解的求法

1. 先求出与其对应的齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解 $\bar{y}$.

2. 再求出非齐次方程的特解 y^* ,则该方程的通解为 $y = \bar{y} + y^*$.

3. 特解 y^* 的求法

(1) 若 $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$,则方程的特解可设为 $y^* = x^k Q_n(x) e^{\alpha x}$.

其中 $Q_n(x)$ 与 $P_n(x)$ 是同次多项式,系数待定,且

$$k = \begin{cases} 0, & \alpha \text{ 不是特征根,} \\ 1, & \alpha \text{ 为单特征根,} \\ 2, & \alpha \text{ 为二重特征根.} \end{cases}$$

(2) 若 $f(x) = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$,则方程的特解可设为 $y^* = x^k e^{\alpha x} (A_1 \cos \beta x + B_1 \sin \beta x)$.

其中 A_1, B_1 为待定系数,且

2. 等比级数(几何级数)

称 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($a \neq 0, q$ 公比) 为等比级数(当 $|q| < 1$ 时, 级数收敛; 当 $|q| \geq 1$ 时, 级数发散).

考点 3 级数的运算性质

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ ($k \neq 0$) 具有相同的敛散性.
2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛.
3. 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前面去掉、加上或改变其有限项, 不改变级数的敛散性.

考点 4 级数收敛的必要条件

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

第二节 正项级数

考点 5 正项级数的概念

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中每项 $u_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

考点 6 p 级数

形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 0$) 的级数(当 $p > 1$ 时, 级数收敛; 当 $0 < p \leq 1$ 时, 发散).

考点 7 比较判别法

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 当 $u_n \leq v_n$ 时, 则

1. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛.
2. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 必发散.

比较判别法的极限形式: 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda$ ($0 < \lambda < +\infty$), 那么, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 具有相同的敛散性.

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0),$$

特殊情况, 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线垂直于 x 轴, 切线方程为 $x = x_0$, 法线方程为 $y = f(x_0)$.

考点 3 函数可导性与连续性的关系

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处必连续, 但反之不成立, 即函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续, 它在该点不一定可导.

考点 4 导数的运算

1. 基本初等函数的导数公式

$$\begin{aligned} c' &= 0 (c \text{ 为常数}) & (x^a)' &= ax^{a-1} (a \text{ 为实数}) \\ (a^x)' &= a^x \ln a & (e^x)' &= e^x \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a} & (\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} & (\operatorname{arccot} x)' &= \frac{-1}{1+x^2} \\ (\sec x)' &= \sec x \cdot \tan x & (\csc x)' &= -\csc x \cdot \cot x \end{aligned}$$

2. 导数的四则运算法则

设 $u = u(x)$ 与 $v = v(x)$ 在点 x 处可导, 则

$$\begin{aligned} (cu)' &= cu' & (u \pm v)' &= u' \pm v' \\ (uv)' &= u'v + uv' & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0) \end{aligned}$$

3. 反函数的求导法则

设函数 $x = \varphi(y)$ 在某个区间内单调、可导, 且 $\varphi'(y) \neq 0$, 则其反函数 $y = f(x)$ 在对应区间内也可导, 且有 $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$.

即反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

4. 复合函数的求导法则

设 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 复合成 $y = f[g(x)]$, 若 $u = g(x)$ 在点 x 处可导, $y = f(u)$ 在相应点 $u = g(x)$ 可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 可导, 且有链式法则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x).$$

第一步: 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 易求, 首先看 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 是否等于零; 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数必发散.

第二步: 判定 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 是否收敛, 若收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

第三步: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 判定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否收敛, 若收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

第四步: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 既不绝对收敛, 也不条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

第四节 幂级数

考点 15 幂级数的基本理论

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 总在 $x = 0$ 处收敛.

2. 阿贝尔定理

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) 处收敛, 那么当 $|x| < |x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x 处必绝对收敛; 反之, 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$) 处发散, 那么当 $|x| > |x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x 处总发散. (此部分考生可根据自己的情况掌握)

3. 收敛半径

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x = 0$ 点收敛, 则记 $R = 0$; 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在整个数轴上都收敛, 则记 $R = +\infty$.

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R ($0 < R \leq +\infty$), 其收敛区间为 $(-R, R)$. 单独讨论 $x = \pm R$ 处的敛散性, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ 的敛散性来确定级数收敛域为下列区间之一: $(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R]$.

[注] 由历年试题及考纲要求知, 收敛区间端点处不要求讨论, 一般收敛区间写成 $(-R, R)$ 开区间就可以了.

(3) 收敛半径的求法.

对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则有

① 若 $\rho \neq 0$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$.

② 若 $\rho = 0$, 则 $R = +\infty$ (在整个数轴上都收敛).

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

考点 7 多项式求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n}, & m = n, \\ \infty, & m > n, \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

考点 8 两个重要极限

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

考点 9 无穷小量与无穷大量的关系

1. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

2. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

考点 10 无穷小量与函数极限之间的关系

函数 $f(x)$ 以 A 为极限的充要条件是 $f(x)$ 等于 A 与一无穷小量之和, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 为无穷小量.

考点 11 无穷小的性质

1. 有限个无穷小的代数运算仍为无穷小.
2. 有限个无穷小之积仍为无穷小.
3. 有界函数与无穷小之积为无穷小.
4. 无穷小量除以有极限且极限不为零的变量, 其商仍为无穷小量.

考点 12 等价无穷小的代换定理

设 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ 是自变量 x 在同一变化 $x \rightarrow x_0$ 过程中的无穷小, 且 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', f(x), g(x)$ 在自变量的这一变化过程中有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha' f(x)}{\beta' g(x)}$ 存在 (含 ∞), 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha f(x)}{\beta g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha' f(x)}{\beta' g(x)}$.

上述链式法则也可以用于多层复合的情形.

5. 隐函数求导法则

设 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定. 求 y' 只需直接由方程 $F(x, y) = 0$ 关于 x 求导, 将 y 认作中间变量, 以复合函数链式法求之(也可以用于多元函数的隐函数求导法).

6. 由参数方程确定的函数的求导法则

设 $y = y(x)$ 是由 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 所确定. 其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 为可导函数, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

7. 对数求导法

将函数的表达式两边取自然对数, 并利用对数性质将表达式化简, 然后应用隐函数的求导法则, 将等式两边对自变量求导, 最后得出函数的导数, 这种方法叫做对数求导法.

一般应用于幂指函数求导以及表示成积、商、乘方、开方的函数求导.

考点 5 高阶导数

1. 高阶导数的概念

若函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导, 则称 $f'(x)$ 在点 x 处的导数为函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的二阶导数, 记为 $f''(x)$ 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}$, 即

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

一般地, $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数, 记作 $f^{(n)}(x)$, 或 $y^{(n)}$. 二阶及二阶以上的导数统称为高级导数.

2. 高阶导数的计算

$$\text{由于 } \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} [y^{(n-1)}] = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} [y^{(n-2)}] \right\} = \cdots = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\cdots \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] \right\}.$$

因此, $\frac{d^n y}{dx^n}$ 就是对 y 连续进行了 n 次求导.

3. 常用的高阶求导公式

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0)$$

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

(3) 当极点 O 在区域 D 的边界曲线之内时, $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq r(\theta)\}$, 如图 5-3 所示, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

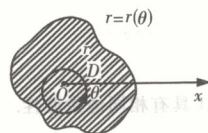


图 5-3

第六节 二重积分的应用

考点 15 二重积分的基本理论

1. $\iint_D dx dy = \sigma$, σ 为区域 D 的面积.

2. 以空间曲面 $z = f(x, y)$ 为曲顶, 以 xOy 坐标面内的平面区域 D 为底面的曲顶柱体的体积为

$$V = \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

3. 若平面薄片 D 上点 (x, y) 处的面密度为 $\rho(x, y)$, 则薄片的质量为

$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

第六章 无穷级数

第一节 数项级数的概念与性质

考点 1 数项级数

如果给定一个无穷数列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, 则称形式和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$

为无穷级数或数项级数, 简称级数. 称 u_n 为级数的通项或一般项; 称 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ 为级数的前 n 项部分和.

考点 2 两个常用级数

1. 调和级数

称 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 为调和级数(发散).

第三节 连续

考点 13 连续的基本理论

1. 函数在一点连续的充要条件. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

2. 基本初等函数在其定义域内都是连续的.

3. 一切初等函数在其定义区间上都是连续的.

4. 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处都连续, 则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点 x_0 也连续.

5. 严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数且单调性不变.

6. 连续函数的复合函数仍为连续函数.

考点 14 闭区间上连续函数的性质

1. 有界性定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界.

2. 最大值最小值定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必能取得最大值与最小值.

3. 介值定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则对于任意介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的 c , 必定存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = c$.

4. 零点定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则必定存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

零点定理常常用来判定方程 $f(x) = 0$ 根的存在性及其范围.

第二章 一元函数微分学

第一节 导数与微分

考点 1 函数在一点可导的充要条件

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在且相等, 即

$$f'(x_0) = A \Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = A$$

考点 2 导数的几何意义

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 存在, 则表明曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处存在切线, 且切线的斜率为 $f'(x_0)$, 切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 法线方程为

考点 8 比值判别法

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则

1. 当 $\rho < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

2. 当 $\rho > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

3. 当 $\rho = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散.

第三节 任意项级数

考点 9 任意项级数

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中各项 u_n 可正、可负或零, 称之为任意项级数.

考点 10 交错级数

形如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0)$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n (u_n > 0)$ 的级数, 称之为交错级数.

考点 11 绝对收敛与条件收敛

对于任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

考点 12 莱布尼茨判别法

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0)$ 满足:

1. $u_n \geq u_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 且和 $S \leq u_1$.

考点 13 任意项级数的基本理论

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛.

考点 14 判定任意项级数是否绝对收敛、条件收敛及发散

判定任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是绝对收敛, 还是条件收敛, 还是发散, 常采取下列步骤:

有 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$.

考点 9 极值存在的充分条件

设函数 $z = f(x, y)$ 在其驻点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有二阶的连续偏导数, 令 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0), \Delta = B^2 - AC$, 于是有

1. 如果 $\Delta < 0$, 则点 (x_0, y_0) 是函数的极值点, 且当 $A < 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是极大值; 当 $A > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是极小值.
2. 如果 $\Delta > 0$, 则点 (x_0, y_0) 不是函数的极值点.
3. 如果 $\Delta = 0$, 则函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有无极值不能确定, 需用其他方法判别.

考点 10 条件极值的求法

先构造拉格朗日函数: $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$.

求解方程组

$$\begin{cases} F_x = f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0, \\ F_y = f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0, \\ F_\lambda = \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

解出 x, y, λ , 则其中 (x, y) 就是 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点的坐标.

第四节 二重积分的概念与性质

考点 11 二重积分的存在定理

如果 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 存在.

考点 12 二重积分的基本性质

设 $f(x, y), g(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积, 则有

1. $\iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma$.
2. $\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma$.
3. 在 D 上若 $f(x, y) = 1$, 且 D 的面积为 σ , 则有 $\iint_D 1 d\sigma = \iint_D d\sigma = \sigma$.
4. 如果可以将 D 分成两个子区域 D_1, D_2 , 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$.
5. 在 D 上若有 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则有 $\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$, 且 $|\iint_D f(x, y) d\sigma| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$.

$$= 2 \iint_{D_{\text{右}}} f(x, y) dx dy.$$

[注] 如果积分区域关于 x 轴对称, 当考虑被积函数具有相应的奇偶性时, 也可得到类似的结论.

考点 14 极坐标系下的二重积分的计算

1. 直角坐标与极坐标的关系: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.
2. 适合在极坐标系下计算的二重积分特征

(1) 积分区域 D 为圆域、圆环、扇形或它们的一部分.

(2) 被积函数 $f(x, y)$ 中含 $x^2 + y^2$ 或 $\frac{y}{x}$, 即

$$f(x, y) = f(x^2 + y^2), \quad f(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

3. 在极坐标系下二重积分转化成的二次积分结构

(1) 当极点 O 在区域 D 的外部时, $D = \{(r, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}$, 如图 5-1 所示, 则

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \end{aligned}$$

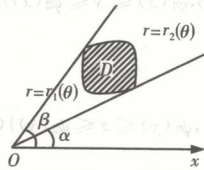


图 5-1

(2) 当极点 O 在区域 D 的边界曲线之上时, $D = \{(r, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\theta)\}$, 如图 5-2 所示, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

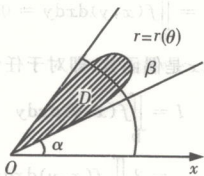


图 5-2

1. 若对于任意的 $x \in (a, b)$, 有 $f'(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为单调增加的函数.
2. 若对于任意的 $x \in (a, b)$, 有 $f'(x) < 0$, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上为单调减少的函数.

考点 16 函数取得极值的必要条件和充分条件

1. 必要条件

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且在点 x_0 处取得极值, 则在点 x_0 处必有 $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在, 即 x_0 必为函数 $f(x)$ 的驻点或不可导点.

反之不成立, 即函数 $f(x)$ 的驻点或不可导点并不一定就是极值点.

2. 第一种充分条件

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内可导, 且 $f'(x_0) = 0$ (或在点 x_0 处 $f'(x)$ 不存在). 若在此邻域内:

- (1) 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 而当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$;
- (2) 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 而当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$;

若当 $x < x_0$ 与 $x > x_0$ 时, $f'(x)$ 不改变符号, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不取得极值.

3. 第二种充分条件

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$. 若

- (1) $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$.
- (2) $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$.
- (3) $f''(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可能取得极值, 也可能不取得极值, 这时需要用第一种充分条件判定.

考点 17 最大值与最小值的求法

闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $y = f(x)$ 必定存在最大值与最小值.

求最大值与最小值的一般方法是:

1. 求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的所有驻点、导数不存在的点.
2. 求出上述各点及区间两个端点 $x = a, x = b$ 处的函数值.
3. 进行比较, 其中最大的数值即为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 而其中最小的数值即为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值.

考点 18 曲线凹凸性的判定

设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导.

1. 若在 (a, b) 内有 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为凹的.
2. 若在 (a, b) 内有 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内为凸的.

$$\left(\frac{1}{x+b}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+b)^{n+1}}$$

$$[\ln(x+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+b)^n}$$

4. 高阶求导运算法则

设函数 u 和 v 具有 n 阶导数, 则

- (1) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
- (2) $(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$ (其中 c 为常数);

(3) 莱布尼茨公式: $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$ (其中 $C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ 为组合数).

考点 6 可微与可导的关系

$f(x)$ 在点 x 可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x 可导, 且 $dy = f'(x) dx$.

由 $dy = f'(x) dx$ 可得 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, 即 $f(x)$ 在点 x 处的导数等于函数微分 dy 与自变量微分 dx 之商, 故导数又叫微商.

[注] 微分 dy 与函数增量 Δy 的差 $\Delta y - dy = o(\Delta x)$, 且 $o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小, 因此当 $|\Delta x|$ 很小时, 可用 dy 近似代替 Δy .

考点 7 函数可微的充要条件

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,

即 $dy \Big|_{x=x_0}$ 存在 $\Leftrightarrow f'(x_0)$ 存在.

考点 8 可微与连续的关系

若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则函数 $f(x)$ 必在点 x_0 处连续.

考点 9 一阶微分形式不变

对于函数 $y = f(u)$, 无论 u 是自变量还是中间变量, 其一阶微分都具有形式

$$dy = f'(u) du.$$

第二节 微分中值定理

考点 10 罗尔(Rolle)定理

- 如果函数 $y = f(x)$ 满足条件: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a, b) 内可导; (3) $f(a) = f(b)$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$.

考点19 曲线拐点的判定

对于在 (a,b) 内的连续曲线弧 $y=f(x)$,判定拐点的一般方法是:

1. 求出该函数的二阶导数,并求出使二阶导数等于零的点,以及二阶导数不存在的点.
2. 判定上述各点两侧,函数的二阶导数是否异号,如果 $f''(x)$ 在 x_0 的两侧异号,则 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线弧 $y=f(x)$ 的拐点.

第三章 一元函数积分学

第一节 不定积分

考点1 不定积分的性质

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k 为不等于0的常数).

2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

3. $(\int f(x)dx)' = f(x)$

或 $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

4. $\int f'(x)dx = f(x) + C$

或 $\int df(x) = f(x) + C$.

考点2 不定积分基本公式

1. $\int 0dx = C$.

2. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$).

3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$,特别地 $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

考点11 拉格朗日(Lagrange)中值定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足条件:(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续;(2)在开区间 (a,b) 内可导,则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ ,使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

推论1 若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且导数 $f'(x)$ 恒为零,则在 (a,b) 内 $f(x)=C$ (常数).

推论2 若在 (a,b) 内恒有 $f'(x)=g'(x)$,则在 (a,b) 内必有 $f(x)=g(x)+C$,其中 C 为某个常数.

第三节 洛必达(L'Hospital)法则

考点12 “0/0”型未定式

如果函数 $f(x),g(x)$ 满足条件:

1. 在点 x_0 的某一去心邻域(或 $|x|>N$)内可导,且 $g'(x) \neq 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大),则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

考点13 “∞/∞”型未定式

如果 $f(x),g(x)$ 满足条件:

1. 在点 x_0 的某一去心邻域(或 $|x|>N$)内可导,且 $g'(x) \neq 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大),则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

考点14 “0·∞”型、“∞-∞”型未定式

求“0·∞”型和“∞-∞”型的极限,通常都是用简单的恒等变形化成“0/0”或“∞/∞”型的未定式.

第四节 导数的应用

考点15 函数单调性的判定

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

2. 几种特殊情形下的链式法则

设下面几种情形中的函数皆具有连续的导数(偏导数):

(1) 如果 $z=f(u,v), u=\varphi(x), v=\psi(x,y)$,则复合函数 $z=f[\varphi(x), \psi(x,y)]$ 的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

(2) 如果 $z=f(u,v), u=\varphi(x), v=\psi(x)$,则复合函数 $z=f[\varphi(x), \psi(x)]$ 的导数为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

(3) 如果 $z=f(u,v), u=x, v=\psi(x)$,则复合函数 $z=f[x, \psi(x)]$ 的导数为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

考点7 隐函数的偏导数

1. 一元隐函数

设方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的函数,且 $F(x,y)$ 在点 (x,y) 的某个邻域内具有连续偏导数,则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \quad (F_y(x,y) \neq 0).$$

[注] 也可用一阶全微分形式的不变性,求隐函数的导数.

2. 二元隐函数

如果方程 $F(x,y,z)=0$ 确定 z 是 x,y 的函数,且 $F(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 的某个邻域内有连续偏导数,则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \quad (F_z(x,y,z) \neq 0).$$

[注] 求隐函数的导数(偏导数)的这种公式,可推广使用到任何多元隐函数中去. 请注意求导公式的结构.

第三节 二元函数的极值

考点8 极值存在的必要条件

设 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极值点,且 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处的偏导存在,则必

$$\iint_D |f(x,y)| d\sigma.$$

6. 若 M,m 分别是 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值和最小值,且 σ 为 D 的面积,则有 $m\sigma \leq \iint_D f(x,y)d\sigma \leq M\sigma$.

7. 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, σ 是 D 的面积,则在 D 上至少存在一点 (ξ,η) ,使得 $\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta) \cdot \sigma$.

8. 二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 表示一数值.

第五节 二重积分在坐标系下的计算

考点13 直角坐标下二重积分的计算

1. 若 $D=\{(x,y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ (矩形区域),则 $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$ 或 $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$.

特别地,若 $f(x,y)=f_1(x) \cdot f_2(y)$,则 $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy$.

2. 若 $D=\{(x,y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ (X-型区域),则 $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

3. 若 $D=\{(x,y) | c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ (Y-型区域),则 $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$.

4. 二重积分的对称奇偶性:设积分区域 D 关于 y 轴对称,它被 y 轴分为左右对称的两部分: $D=D_{\text{左}}+D_{\text{右}}$.

(1) 若被积函数 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数,即对于任何 y ,都有 $f(-x,y)=-f(x,y)$,则

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = 0.$$

(2) 若被积函数 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数,即对于任何 y ,都有 $f(-x,y)=f(x,y)$,则

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = 2 \iint_{D_{\text{左}}} f(x,y)dxdy$$

4. 由两曲线 $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$, 且 $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ 在 y 轴同侧, $|\varphi_2(y)| > |\varphi_1(y)|$ 及两直线 $y = c, y = d (c < d)$ 所围平面图形绕 y 轴旋转一周所成的体积为

$$V = \pi \int_c^d [\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)] dy.$$

第四章 空间解析几何

第一节 平面与直线

考点 1 两平面的位置关系

设有两平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$\pi_1 \perp \pi_2$ 的充要条件是 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

$\pi_1 // \pi_2$ 的充要条件是 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

考点 2 两直线的位置关系

设直线 l_1, l_2 的方程为

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1},$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2},$$

直线 l_1 平行 l_2 的充要条件为 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

直线 l_1 垂直 l_2 的充要条件为 $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

考点 3 直线 l 与平面 π 的位置关系

$$l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0,$$

直线 l 与平面 π 平行的充要条件为 $Am + Bn + Cp = 0$.

直线 l 与平面 π 垂直的充要条件为 $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

第二节 简单的二次曲面

考点 4 各种曲面的方程

各种曲面的方程如下表:

连续函数.

2. 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

3. 多元初等函数在其定义域上都是连续函数.

4. 最值定理 有界闭区域 D 上连续的函数, 在区域 D 上必能取得最大值与最小值.

5. 介值定理 有界闭区域 D 上连续的函数, 在区域 D 上必能取得介于最大值与最小值之间的任何值.

第二节 偏导数与全微分

考点 4 全微分的性质

1. 多元函数的可微、偏导数存在与连续三者之间有如下关系, 即全微分存在的必要条件与充分条件:



但反之不一定成立.

[注] 对于多元函数, 可导与可微不等价, 可微偏导一定存在, 偏导存在不一定可微; 偏导存在不一定连续, 连续也不一定偏导存在.

2. 一阶全微分形式的不变性

对于函数 $z = f(u, v)$, 如果 $f(u, v)$ 可微, 那么无论 u, v 是函数的中间变量, 还是自变量, 均有

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

考点 5 高阶混合偏导数的性质

如果二元函数 $z = f(x, y)$ 的二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 那么, 在该

$$\text{点处 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

考点 6 多元函数的偏导数

1. 复合函数的偏导数

设函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 在点 (x, y) 处有连续偏导数, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 处有连续偏导数. 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 处对 x, y 有连续偏导数, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

考点 6 函数可积条件

1. $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的必要条件是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

2. $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充分条件是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

考点 7 定积分的性质

$$1. \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 为常数}).$$

$$2. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$4. \text{规定 } \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$6. \int_a^b dx = b - a.$$

$$7. \text{若在区间 } [a, b] \text{ 上有 } f(x) \leq g(x), \text{ 则 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

8. 设 m, M 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最小值, 最大值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

$$9. \text{在区间 } [a, b] \text{ 上恒有 } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

[注] 在性质 7、8、9 中都有前提条件, 在区间 $[a, b]$ 上, 即下限小, 上限大, 否则全不成立.

10. 定积分中值定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ 成立, 则称 $f(\xi)$ 或称 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值.

考点 8 微积分学基本定理

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则变上限积分 $R(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是被积函数 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $R'(x) = f(x)$ 或 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$.

牛顿-莱布尼茨公式

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$8. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$$

$$9. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$$

$$10. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$$

[注] 基本积分公式是由基本初等函数求导公式推演得出, 常用的积分公式有:

$$11. \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$12. \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$13. \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$14. \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$15. \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + C.$$

$$16. \int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + C.$$

$$17. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

$$18. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a > 0).$$

考点 3 第一换元积分法(凑微分法)

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$, $u = \varphi(x)$ 可导, 则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(u) du$$

$$= F(u) + C$$

$$= F[\varphi(x)] + C.$$

常用的凑微分公式:

$$1. f(ax+b) dx = \frac{1}{a} f(ax+b) d(ax+b) \quad (a \neq 0).$$

$$2. f(ax^k+b)x^{k-1} dx = \frac{1}{ka} f(ax^k+b) d(ax^k+b) \quad (a \neq 0, k \neq 0).$$

$$3. f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} dx = -f\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right).$$

考点 9 定积分的求法

1. 定积分的换元积分法

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 满足:

- (1) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上单调且连续.
- (2) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.
- (3) $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

2. 定积分的分部积分法

设函数 $u(x), v(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数, 则

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx \text{ 或 } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

3. 奇、偶函数在对称区间上的积分

若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上为连续奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上为连续偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

考点 10 无穷区间上的反常积分

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上一定可积, 若 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ 存

在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 并且 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$.

若 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ 不存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上一定可积, 若 $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ 存

在, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 收敛, 并且 $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$.

若 $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ 不存在, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 发散.

3. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

第三节 定积分的应用

考点 11 求平面图形的面积

1. 由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b (a < b)$ 及 x 轴所围图形面积为

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

当 $f(x) \geq 0$ 时, $S = \int_a^b f(x) dx$.

当 $f(x) \leq 0$ 时, $S = -\int_a^b f(x) dx$.

当 $f(x)$ 有正有负时, $S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

2. 由两曲线 $y = f_1(x), y = f_2(x) (f_2(x) > f_1(x))$ 及两直线 $x = a, x = b (a < b)$ 所围图形的面积为

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

3. 由曲线 $x = \varphi(y)$, 直线 $y = c, y = d (c < d)$ 及 y 轴所围图形的面积为

$$S = \int_c^d |\varphi(y)| dy.$$

4. 由两曲线 $x = \varphi_1(y), x = \varphi_2(y)$, 且 $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ 在 y 轴同侧, $(\varphi_2(y) > \varphi_1(y))$ 及两直线 $y = c, y = d (c < d)$ 所围图形面积为

$$S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)] dy.$$

5. 由曲线 $y = f_1(x), y = f_2(x) (f_2(x) > f_1(x))$ 所围成的封闭图形的面积为

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

其中 a 是交点中 x 的最小值, b 是交点中 x 的最大值.

考点 12 旋转体的体积

1. 由曲线段 $y = f(x), x \in [a, b]$ 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

上述体积公式也可以看做由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b (a < b)$ 及 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成的体积.

2. 由曲线段 $x = \varphi(y), y \in [c, d]$ 绕 y 轴旋转一周所成的体积为

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy.$$

上述体积公式也可以看做由曲线 $x = \varphi(y)$, 直线 $y = c, y = d (c < d)$ 及 y 轴所围平面图形绕 y 轴旋转一周所成的体积.

3. 由两曲线 $y = f_1(x), y = f_2(x)$, 且 $f_1(x), f_2(x)$ 在 x 轴同侧, $|f_2(x)| > |f_1(x)|$ 及两直线 $x = a, x = b (a < b)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成的体积为

$$V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

$$4. f(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2f(\sqrt{x}) d\sqrt{x}.$$

$$5. f(e^x) \cdot e^x dx = f(e^x) de^x.$$

$$6. f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = f(\ln x) d(\ln x).$$

$$7. f(\sin x) \cdot \cos x dx = f(\sin x) d(\sin x).$$

$$8. f(\cos x) \cdot \sin x dx = -f(\cos x) d(\cos x).$$

$$9. f(\tan x) \cdot \sec^2 x dx = f(\tan x) d(\tan x).$$

$$10. f(\cot x) \cdot \csc^2 x dx = -f(\cot x) d(\cot x).$$

$$11. f(\arcsin x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = f(\arcsin x) d(\arcsin x).$$

$$12. f(\arccos x) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -f(\arccos x) d(\arccos x).$$

$$13. f(\arctan x) \cdot \frac{dx}{1+x^2} = f(\arctan x) d(\arctan x).$$

考点 4 第二换元积分法

设 $x = \varphi(t)$ 是单调可导函数, 又已知 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数 $\Phi(t)$, 则 $\Phi[\varphi^{-1}(x)]$ 是

$f(x)$ 的原函数. 即 $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt = \Phi(t) + C = \Phi[\varphi^{-1}(x)] + C$.

其中 $\varphi^{-1}(x)$ 是 $x = \varphi(t)$ 的反函数.

[注] 关于不定积分基本公式和凑微分公式不再一一罗列, 但考生必须熟记.

第二节 定积分

考点 5 定积分的几何意义

若区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$, 则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值为由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$,

$x = b, y = 0$ 所围成图形即曲边梯形的面积, 即 $\int_a^b f(x) dx = S$.

若在 $[a, b]$ 上 $f(x) < 0$, 则积分值为负, 这个负数的相反数即 $-\int_a^b f(x) dx$ 表示由曲线

$y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b, y = 0$ 所围图形的面积, 即 $\int_a^b f(x) dx = -S$.

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内有正有负, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 表示曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b$ 及

x 轴所成的各部分图形的面积代数和, 即 $\int_a^b f(x) dx = S_1 - S_2$.

名 称	方 程
球面	$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
椭球面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
柱面	圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$
	椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$
	抛物柱面 $x^2 - 2py = 0 (p > 0)$
旋转抛物面	$z = x^2 + y^2$
椭圆锥面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

第五章 多元函数微积分学

第一节 多元函数、极限与连续性

考点 1 二元函数的极限

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一去心邻域内有定义, $P(x, y)$ 为该邻域内任意一点, 当 $P(x, y)$ 以任意方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 的值都趋近于一个确定的常数 A , 则称 A 是函数 $z = f(x, y)$ 当点 $P(x, y)$ 趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时的极限, 记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \text{ 或 } \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A.$$

关于二元函数的极限, 只要理解概念即可, 不要求考生掌握求二元函数极限的方法.

考点 2 二元函数的连续性

如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义, 且有

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续; 否则, 称函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处间断.

如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内的每个点 (x, y) 处都连续, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内连续.

考点 3 多元函数的连续性性质

1. 多元连续函数的和、差、积仍为连续函数; 在分母不为零的点处, 连续函数之商仍为